Digitale Signalverarbeitung Übung 6

1. Gleichungssysteme

a) Bei zwei Messungen der Größe x ergaben sich die Werte x = 1,0 und x = 1,2. Interpretieren Sie das Ergebnis als Gleichungssystem (2 Gleichungen für 1 Variable) und lösen Sie es mit Hilfe der Pseudoinversen.

b) Bestimmen Sie die Konditionszahl des Gleichungssystems $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{d}$. Lösen Sie das System für die beiden Fälle $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$.

2. Interpolation, Ausgleich und Glätten

a) Was ist der Unterschied zwischen Interpolation, Ausgleich und Glätten?

b) Interpolieren Sie die Punkte (0,0), (1,2) und (4,0) mit einem natürlichen Spline.
Hinweis: Sie benötigen zwei Teilkurven mit insg. 8 Unbekannten, die Sie aus den Bedingungen für Werte, Ableitungen und Krümmungen bestimmen können. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Matlab.

c) Interpolieren Sie die Punkte aus b) nochmals mit Hilfe der Langrange-Formel.

d) Gegeben sind 3 Punkte in der Tabelle unten. Bestimmen nach dem Neville-Algorithmus einen Interpolationswert 2. Ordnung für $x = 1$.

x_i	0	2	3
y_i	0	4	3

e) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade durch die Punkte (0,0), (1,1) und (2,1). Berechnen Sie dazu Offset und Steigung.

f) Mit der Ursprungsgeraden $y = a \cdot x$ sollen die beiden Punkte (1,2) und (2,3) ausgeglichen werden. Stellen sie die Fehlerfunktion auf und bestimmen Sie a.

g) Das folgende Signal ist ein Chirp, d.h. ein Sinus, der seine Frequenz ändert:
$y_k = \sin\left(\frac{\pi}{10^{11}} \cdot k^4\right)$, k = 0…999.

Erzeugen Sie den Signalvektor in Matlab, dann addieren Sie Rauschen als Vektor der selben Länge (`randn(1, length(y)) /5`) und plotten das Ergebnis (Farbe Cyan).

Glätten Sie das verrauschte Signal mit dem gleitenden Durchschnitt über 33 Werte (FIR-Filter; wie lauten Zähler und Nenner? Befehl `filter`) . Plotten Sie das Ergebnis. Welche Nachteile hat dieses Filter?

Glätten Sie nun das verrauschte Signal mit einem Savitzky-Golay-Filter, das durch je 33 Punkte ein Ausgleichpolynom 3. Ordnung legt (`sgolayfilt(y_noisy, 3, 33)`). Welche Unterschiede gibt es zum gleitenden Durchschnitt?

3. Ableitung und Integration

a) Ableitungen:
Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Systems an, das die Ableitung des Eingangssignals ausgibt.
Welche Art von Filter stellt es dar? Was bedeutet das für verrauschte Daten?

Ein Prozessor berechnet in SFRAC(1.15) die Ableitung einer Funktion näherungsweise über $f'(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Welcher Wert für Δx ist optimal?

b) Bestimmen Sie das Integral $\int_{-5}^{x} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \cdot du$, x ≤ 5, mit der Matlab-Funktion `ode45`.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'' = x^2 \cdot y;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ mit `ode45`. (0 ≤ x ≤ 2)

Hinweise zu b) und c):	Bsp.: $y' = \frac{x}{y},\ 0 \le x \le 1, y(0) = 1$
Matlab benötigt die erste Ableitung y‘ als Referenz auf eine Funktion von x (bzw. t, u, …) und y. Definieren Sie dazu ein Funktionshandle @(x,y) <f(x,y)>.	`dy = @(x,y) x/y;`
Als nächstes muss das x-Intervall [x_{min} x_{max}] oder alle x-Werte angegeben werden, für die die numerische Lösung berechnet werden soll.	`xint = [0 1];`
Dann benötigt Matlab noch den Anfangswert y(x_{min}).	`y0 = 1;`
Die Funktion ode45 gibt die x-Werte und die y-Werte als Spaltenvektoren aus:	`[x y] = ode45(dy, xint, y0);` `plot(x,y)`

Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden umgeformt in 2 Gleichungen 1. Ordnung:
$y'' = f(x,y,y') \xrightarrow{y\to y_1} y_1' = y_2 \ \wedge\ y_2' = f(x,y_1,y_2)$
Das Funktionshandle ist ein Spaltenvektor für die beiden Funktionen y_1' und y_2'.
	Bsp: $y'' = x \cdot y/y'$
	
	`dy = @(x,y)`
	`[y(2);`
	`x*y(1)/y(2)];`

Auch die Anfangsbedingung wird als Spaltenvektor $\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x_{min}) \\ y'(x_{min}) \end{bmatrix}$ definiert.	Bsp: $y(0) = 1;\ y'(0) = 2$ `y0 = [1;2];`
`ode45` liefert in y zwei Spaltenvektoren. Der erste enthält die Lösungswerte zu y_1, der zweite zu $y_2 = y_1'$.	`[x y] = ode45( dy, xint, y0);` `plot( x, y(:,1) )`

Lösungen:

1.a) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot x = \begin{bmatrix}1{,}0\\1{,}2\end{bmatrix} \rightarrow\ A = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\quad A^T\cdot A = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$

$P = (A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad x = P\cdot\begin{bmatrix}1{,}0\\1{,}2\end{bmatrix} = \frac{1{,}0+1{,}2}{2} = 1{,}1$

b) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1{,}1\end{bmatrix} \rightarrow\ A^{-1} = \frac{1}{det}\cdot\begin{bmatrix}1{,}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix};\ det = 1\cdot 1{,}1 - 1\cdot 1 = 0{,}1 \rightarrow\ A^{-1} = \begin{bmatrix}11 & -10\\-10 & 10\end{bmatrix}$

$|A|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1{,}1^2 = 4{,}21;\qquad |A^{-1}|^2 = 11^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 = 421$

$cond(A) = |A|\cdot|A^{-1}| = \sqrt{4{,}21\cdot 421} = 42{,}1$ ($\gg 1\ \rightarrow$ Fehler in $\vec{d}$ verfälschen $\vec{x}$ stark)

(1) $\vec{x} = \begin{bmatrix}11 & -10\\-10 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1{,}1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$; (2) $\vec{x} = \begin{bmatrix}11 & -10\\-10 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1{,}2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

Weil das Gleichungssystem schlecht konditioniert ist, führen kleine Fehler in $\vec{d}$ (ca. 10%) zu großen Fehlern in $\vec{x}$.

2.a) In jedem Fall sind Stützstellen als Punkte (x_k, y_k) vorgegeben. Interpolation und Ausgleichsrechnung suchen Zwischenwerte zwischen diesen Stützstellen.
Dabei baut aber die Interpolation die Stützstellen genau ein, während die Ausgleichsrechnung eine Kurve mit freien Parametern zwischen die Stützstellen legt, die also nicht auf der Kurve liegen müssen.
Beim Glätten sollen nur die gegebenen y_k von Rauschen/Störungen befreit werden, es sind keine Zwischenwerte gesucht.

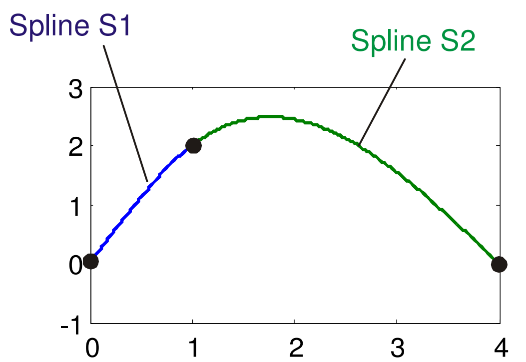
b) Die Spline-Polynome lauten jeweils

$S(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$, die Ableitung ist

$S'(x) = 3a\cdot x^2 + 2b\cdot x + c$ und die Krümmung

$S''(x) = 6a\cdot x + 2b$. Es ergeben sich 8 Gleichungen

(die beiden letzten wegen „natürlicher Spline"):



Kategorie	Punkt	Bedingung
Werte	(0,0)	$a_1\cdot 0^3 + b_1\cdot 0^2 + c_1\cdot 0 + d_1 = 0$
	(1,2)	$a_1\cdot 1^3 + b_1\cdot 1^2 + c_1\cdot 1 + d_1 = 2$
	(1,2)	$a_2\cdot 1^3 + b_2\cdot 1^2 + c_2\cdot 1 + d_2 = 2$
	(4,0)	$a_2\cdot 4^3 + b_2\cdot 4^2 + c_2\cdot 4 + d_2 = 0$
Ableitung	(1,2)	$3a_1\cdot 1^2 + 2b_1\cdot 1 + c_1 = 3a_2\cdot 1^2 + 2b_2\cdot 1 + c_2$
Krümmung	(1,2)	$6a_1\cdot 1 + 2b_1 = 6a_2\cdot 1 + 2b_2$
	(0,0)	$6a_1\cdot 1 + 2b_1 = 0$
	(4,0)	$6a_2\cdot 1 + 2b_2 = 0$

Die 5. und 6. Gleichung werden so umgestellt, dass die rechte Seite 0 ergibt.

Dann entsteht ein Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \\ d1 \\ a2 \\ b2 \\ c2 \\ d2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Lösung schenkt uns Matlab:

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = \frac{7}{3}, \quad d_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{9}, \quad b_2 = -\frac{4}{3}, \quad c_2 = \frac{11}{3}, \quad d_2 = -\frac{4}{9}$$

Berechnung und Plot siehe Skript „DSP6_spline.m“.

c) Lagrange-Formel: $P(x) = 0 + \frac{(x-0)\cdot(x-4)}{(1-0)\cdot(1-4)} \cdot 2 + 0 = \frac{2\cdot x\cdot(x-4)}{-3}$ (beachte $y_1 = y_3 = 0$)

d) Interpolation 1. Ordnung:

in $x \in [0;2]$: $P_{12} = \frac{(x_2-x)\cdot y_1+(x-x_1)\cdot y_2}{x_2-x_1} = \frac{(2-1)\cdot 0+(1-0)\cdot 4}{2-0} = 2$

in $x \in [2;3]$: $P_{23} = \frac{(x_3-x)\cdot y_2+(x-x_2)\cdot y_3}{x_3-x_2} = \frac{(3-1)\cdot 4+(1-2)\cdot 3}{3-2} = 5$

(letzteres ist eigentlich eine Extrapolation, weil $x = 1$ nicht im Intervall liegt)

Interpolation 2. Ordnung: in $x \in [0;3]$:

$$P_{123} = \frac{(x_3-x)\cdot P_{12}+(x-x_1)\cdot P_{23}}{x_3-x_1} = \frac{(3-1)\cdot 2+(1-0)\cdot 5}{3-0} = 3$$

i	x_i	y_i	1. Ord.	2. Ord.
1	0	0	$P_{12} = 2$	
2	2	4		$P_{123} = 3$
3	3	3	$P_{23} = 5$	

e)

n	1	2	3
x_n	0	1	2
y_n	0	1	1

$\sum x_n = 3$, $\sum y_n = 2$, $\sum x_n^2 = 5$, $\sum x_n \cdot y_n = 3$

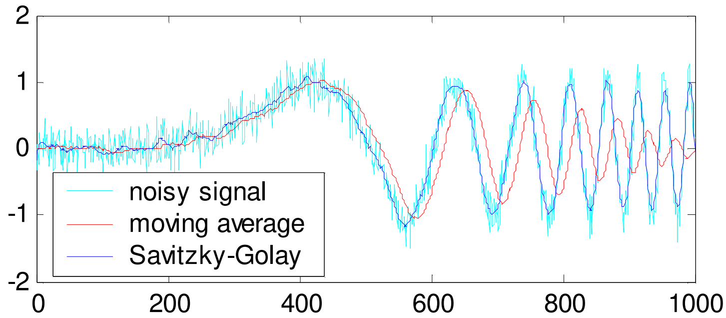
$$a = \frac{3-3\cdot\frac{2}{3}}{5-\frac{3^2}{3}} = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{2-\frac{1}{2}\cdot 3}{3} = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

f) Die Fehlerfunktion misst die Abweichungen der berechneten und der gemessenen y-Werte:

$$e = (a \cdot x_1 - y_1)^2 + (a \cdot x_2 - y_2)^2 = (a \cdot 1 - 2)^2 + (a \cdot 2 - 3)^2$$

Minimum für $\partial e/\partial a = 2 \cdot (a-2) \cdot 1 + 2 \cdot (2a-3) \cdot 2 = 0 \quad \rightarrow 10a = 16 \rightarrow a = 1{,}6$

g) Der gleitende Durchschnitt ist ein Tiefpass-Filter, das schnelle Vorgänge dämpft. Die Amplituden werden daher nach rechts kleiner. Außerdem sieht man die große Durchlaufzeit durch das Filter.



Das Savitzky-Golay-Filter arbeitet zwar bei langsamen Vorgängen nicht ganz so gut, aber es erhält die Amplituden der schnellen Schwingungen und hat eine wesentlich kleinere Phasenlaufzeit.

Siehe Skript „DSP6_savgolay.m“

3.a1) $y_k = (x_k - x_{k-1})/\Delta t \quad \rightarrow \quad Y(z) = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)/\Delta t \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{1-\frac{1}{z}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z}$

Polstelle bei 0 hat keinen Einfluss auf |H|;
Nullstelle bei $z_0 = 1$ filtert niedrige Frequenzen weg → Hochpass
Signal ist meist bandbegrenzt, Rauschen nicht → das Signal wird stärker gedämpft, das Rauschen macht sich mehr bemerkbar.

a2) Beste Rechengenauigkeit mit $\Delta x = \sqrt{LSB} = \sqrt{2^{-15}} = 5.5 \cdot 10^{-3}$
$(also\ 7\ oder\ 8\ LSB)$ (im Skript „h“)

b),c) siehe Skripte „DSP6_3b.m“ und „DSP6_3c.m“