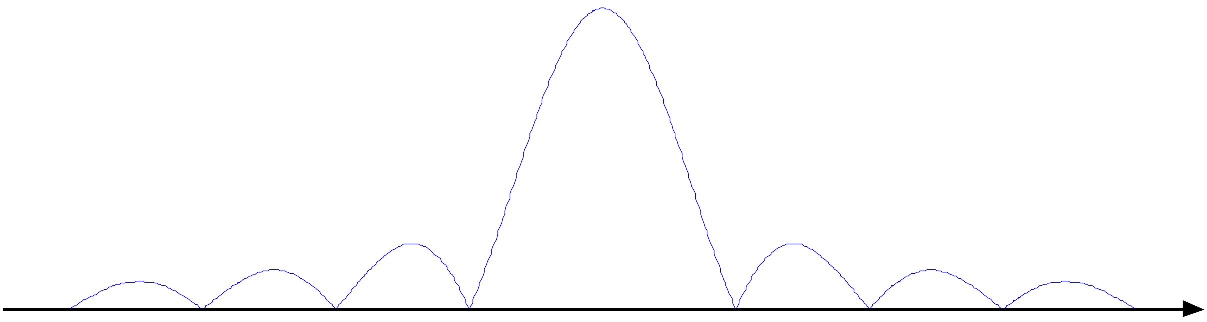
1. Leakage und Fensterung

a) Wodurch entsteht Leakage? Hat Leakage mit Aliasing zu tun?

b) Vom Signal $x(t) = \sin(2\pi \cdot 5{,}55\ kHz \cdot t)$ werden $N = 100$ Werte mit $f_a = 20\ kHz$ abgetastet. Skizzieren Sie das Betragsspektrum in das folgende |sinc|-Diagramm:



Bestimmen Sie dazu die Skalierung der x-Achse. Wo liegt die Signalfrequenz, wo das Maximum und die Nullstellen der Sinc-Funktion? An welchen Stellen $n \cdot \Delta f$ liegen die Frequenzanteile des abgetasteten Signals?

c) Was ändert sich am Betragsspektrum in b), wenn f_a auf 40 kHz erhöht wird und N auf 200?

d) Mit welcher Maßnahme kann das Leakage verkleinert werden?

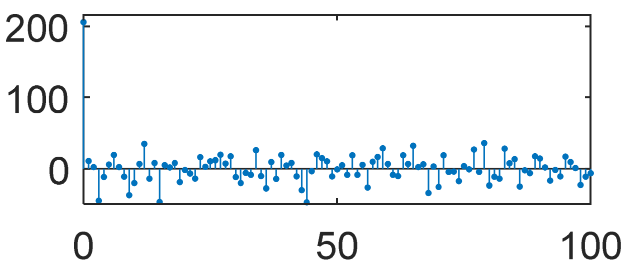
2. Korrelation

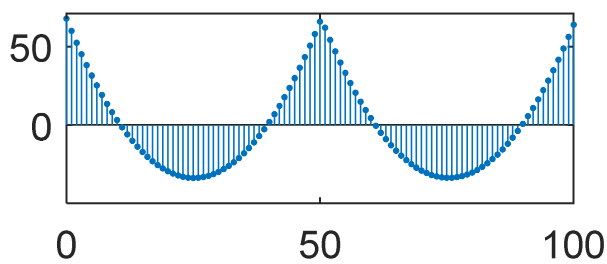
a) Bestimmen Sie die Korrelation R_k^{xy} der beiden nichtperiodischen Signale x_k und y_k:

k	x_m	0	0	0	-1	+2	-1	0	0	0	R_k^{xy}
+3											
+2											
+1											
0	y_{k+m}	0	0	0	-1	-1	+1	0	0	0	
-1											
-2											
-3											

b) Bestimmen Sie die Korrelation R_k^{xy}, wenn die Signale $x_k = \{-1, +2, -1\}$ und $y_k = \{-1, -1, +1\}$ periodisch fortgesetzt werden.

c) Die Diagramme zeigen die (periodische) AKF zweier Signale. Um welche Signaltypen handelt es sich? (Begründung!)



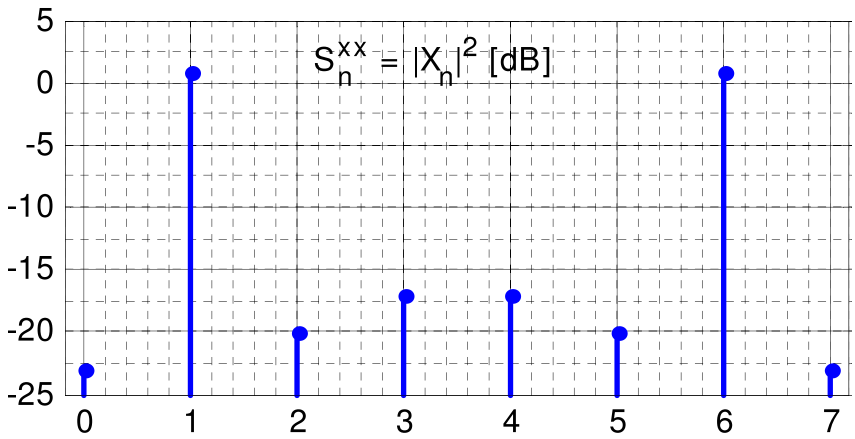


3. Leistungsdichtespektrum

a) Schätzen Sie aus dem folgenden Leistungsdichtespektrum (LDS) das Signal-Rausch-Verhältnis $SNR = 10 \cdot \lg \frac{P_{sig}}{P_{noise}}$ mit $P_{sig} = S_1^{xx}$ sowie $P_{noise} = S_0^{xx} + S_2^{xx} + S_3^{xx}$

b) Das LDS aus a) wurde aus 8 Zeitwerten berechnet. Wie zuverlässig (qualitativ) ist der berechnete SNR?

c) Über wie viele Datensätze zu je 8 Werten müsste man das LDS mitteln, damit die Standardabweichung des Rauschens 10mal kleiner wird?



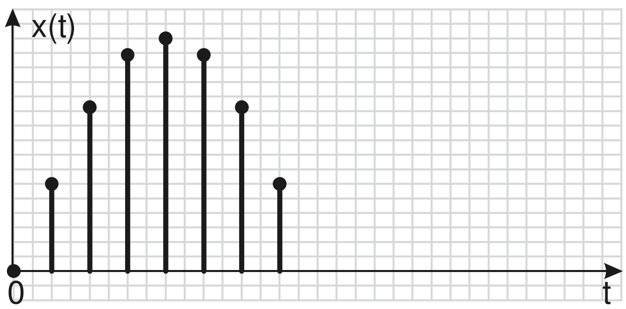
Ein periodisches Signal besteht aus 2 Werten $x_k = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$.

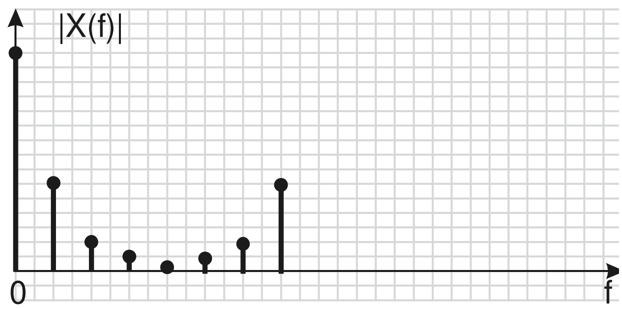
d) Berechnen Sie die periodische und die nichtperiodische AKF von x_k.

e) Berechnen Sie das LDS einmal als Spektrum der periodischen AKF und noch einmal mit der DFT von x_k.

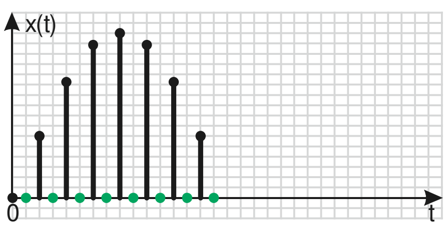
4. Interpolation

Das Bild zeigt ein Signal mit seinem Spektrum:

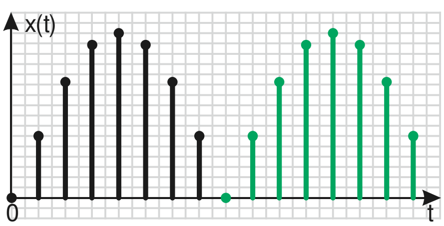




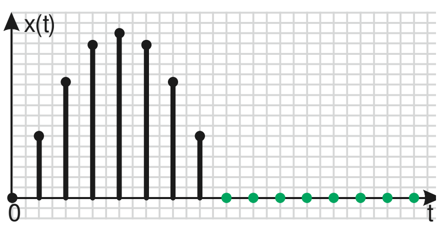
Zeichnen Sie die Spektren für folgende Signale:



(Nullen eingeschoben)



(zwei Perioden)



(Nullen angehängt)

5. Matlab:

a) Simulieren Sie die Aufgaben 1.b) bis d). (Befehle `figure, plot, hold on, stem`)

b) Erzeugen Sie einen Zufallsvektor mit 20.000 gleichverteilten Werten im Bereich -2…+2. Plotten Sie die Häufigkeitsverteilung und berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung. (Befehle `histogram, mean, std`)

c) Erzeugen Sie 16 Zufallsvektoren wie in b) und summieren Sie alle. Sehen Sie sich Häufigkeitsverteilung, Mittelwert und Standardabweichung der Summe an. (Befehl `sum`)

d) Stellen Sie für b) nebeneinander die periodische AKF und das Leistungsdichtespektrum dar. (Befehle `subplot, circxcorr, fft, abs`)

   Welchen Rechenaufwand benötigen AKF und LDS?

e) Tasten Sie von einem Sinussignal zwei ganze Perioden ab mit insgesamt 32 Werten. Dezimieren Sie es über das Spektrum auf 7 Werte. Interpolieren Sie es dann (über das Spektrum) wieder auf 200 Werte.

f) Tasten Sie eine Periode eines Dreiecksignals ab mit 16 Werten. Schieben Sie im Spektrum an jeder 2. Stelle eine 0 ein und sehen Sie sich wieder das Zeitsignal an.

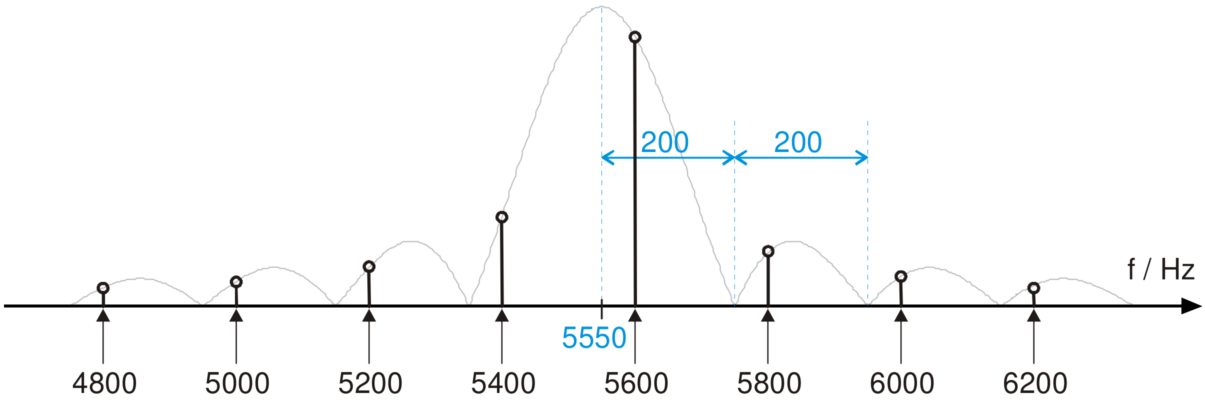
g) Laden Sie die Wave-Datei „eee.wav“ in einen Vektor. Stellen Sie das Audiosignal und die periodische AKF für Zeitpunkte $6950 \le k \le 7700$ dar. (Befehl `audioread`)

Lösungen:

1a) Werden von einem zeitlich unbegrenzten Signal nur endlich viele Werte aufgenommen, dann erscheint jede Frequenz im ursprünglichen Signal verbreitert (im Spektrum systemtheoretisch eine an die jeweilige Frequenz verschobene Sinc-Funktion). Es erscheinen also jede Menge neuer Frequenzanteile bei benachbarten Frequenzen. Im diskreten Spektrum machen sich die zusätzlichen Frequenzanteile dann bemerkbar, wenn beim Periodisieren (Wiederholen) des Zeitsignals ein Sprung auftritt.

Leakage hat zunächst nichts mit Aliasing zu tun, es kann also auch auftreten, wenn das Shannon-Theorem (fa > 2 · maximale Signalfrequenz) erfüllt ist. Weiter entfernte Teile der Sinc-Funktionen können aber das Shannon-Theorem verletzen und zusätzlich für Aliasing sorgen.

b) Durch die Beschränkung des kontinuierlichen Signals auf $T = N/f_a = 5$ ms entsteht ein Sinc an der Stelle der Signalfrequenz $f_0 = 5550$ Hz; die Nullstellen des Sinc liegen im Abstand $\Delta f = 1/T = 200$ Hz (in blau). Wegen der Abtastung (DFT) gibt es Frequenzanteile nur bei $n \cdot \Delta f$, z.B. an 5400 Hz oder 5600 Hz (Pfeile).



c) weiterhin T = 200/40 kHz = 5 ms → es ändert sich nichts. Eine höhere Abtastfrequenz verbessert das Leakage nicht.

d) Fensterung! Dadurch, dass das gewichtete Zeitsignal am Rand gegen 0 geht, wird zumindest ein Sprung verhindert.

2.a) nichtperiodisch:

k	x_m	0	0	0	**-1**	**+2**	**-1**	0	0	0	R_k^{xy}
3		-1	-1	+1							0
2			-1	-1	+1						(-1)·(+1) = -1
1				-1	-1	+1					(-1)·(-1)+2·1 = 3
0	y_{k+m}				**-1**	**-1**	**+1**				(-1)·(-1)+2·(-1)+(-1)·1 = -2
-1						-1	-1	+1			2·(-1)+(-1)·(-1) = -1
-2							-1	-1	+1		(-1)·(-1) = 1
-3								-1	-1	+1	0

b) periodisch:

k	x_m			**-1**	**+2**	**-1**			R_k^{xy}
3		-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	(-1)·(-1)+2·(-1)+(-1)·1 = -2
2		-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	(-1)·1+2·(-1)+(-1)·(-1) = -2
1		+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	(-1)·(-1)+2·1+(-1)·(-1) = 4
0	y_{k+m}	-1	+1	**-1**	**-1**	**+1**	-1	-1	(-1)·(-1)+2·(-1)+(-1)·1 = -2
-1		-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	(-1)·1+2·(-1)+(-1)·(-1) = -2
-2		+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	(-1)·(-1)+2·1+(-1)·(-1) = 4
-3		-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	(-1)·(-1)+2·(-1)+(-1)·1 = -2

c) Links: ähnelt einem δ-Impuls. Es handelt sich um ein Signal, dessen Verschiebungen keine Ähnlichkeit zum Original haben. Das Signal ist also ein Rauschsignal.

Rechts: Periodisch nach 50 Samples → Signal ist ebenfalls periodisch nach 50 Samples

3.a) Da die AKF und das Leistungsdichtespektrum (LDS) symmetrisch („gerade") sind, genügt es, die erste Hälfte zu analysieren. Abgelesen: $S_0^{xx} = -23dB, S_1^{xx} = +1dB, S_2^{xx} = -20dB, S_3^{xx} = -17dB$

$$SNR = 10 \cdot \lg \frac{10^{0,1}}{10^{-2,3} + 10^{-2,0} + 10^{-1,7}} = 10 \cdot \lg \frac{1,26}{0,005 + 0,01 + 0,02} = 10 \cdot \lg 36 = 15,6\ [dB]$$

b) Das LDS wurde aus einem einzigen Datensatz berechnet (8 Zeitwerte ←DFT→ 8 Frq.werte). Die einzelnen Rauschamplituden streuen stark. Das Rauschen setzt sich aus 3 (unabhängigen) Werten zusammen und streut daher etwas weniger (Faktor $1/\sqrt{3}$).

c) Die Streuung von Zufallszahlen sinkt bei Mittelung über N Werte um den Faktor $\sqrt{N}$. Um die Streuung auf 1/10 zu verringern muss man also über 100 Datensätze mitteln.

d) periodisch:

k	x_{m-k}		R_k^{xx}
0	1	$-\frac{1}{2}$	$1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1,25$
1	$-\frac{1}{2}$	1	$2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

nichtperiodisch:

k	x_{m-k}		R_k^{xx}
0	1	$-\frac{1}{2}$	$1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1,25$
1	0	1	$1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -0,5$

e) $S_n^{xx} = FFT\{1,25;\ -1\} = 1,25 \cdot e^{-j2\pi\cdot 0\cdot n/2} + (-1) \cdot e^{-j2\pi\cdot 1\cdot n/2} = 1,25 + (-1) \cdot e^{-j\pi\cdot n} = \{0,25;\ 2,25\}$

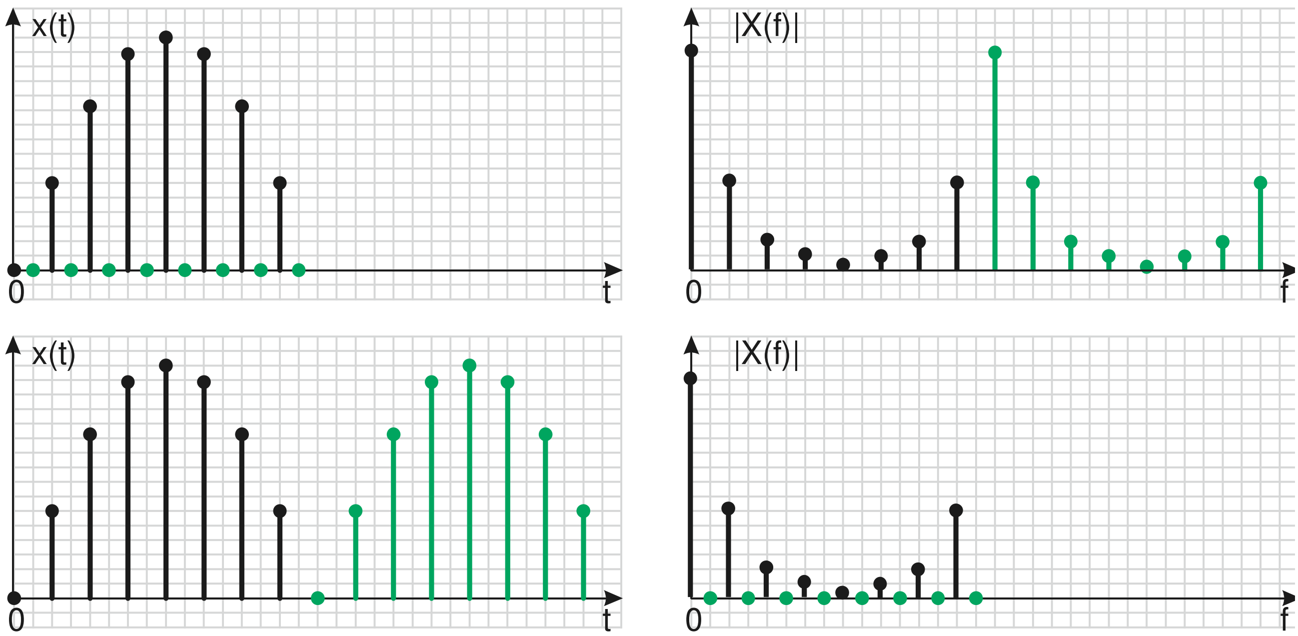
$$X_n = FFT\left\{1; -\tfrac{1}{2}\right\} = 1 \cdot e^{-j2\pi\cdot 0\cdot n/2} - \tfrac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi\cdot 1\cdot n/2} = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot e^{-j\pi\cdot n} = \{0,5; 1,5\} \rightarrow X_n^2 = \{0,25; 2,25\}$$

(gleiches Ergebnis, wenn periodische AKF verwendet wird: DFT geht von periodischen Signalen aus)

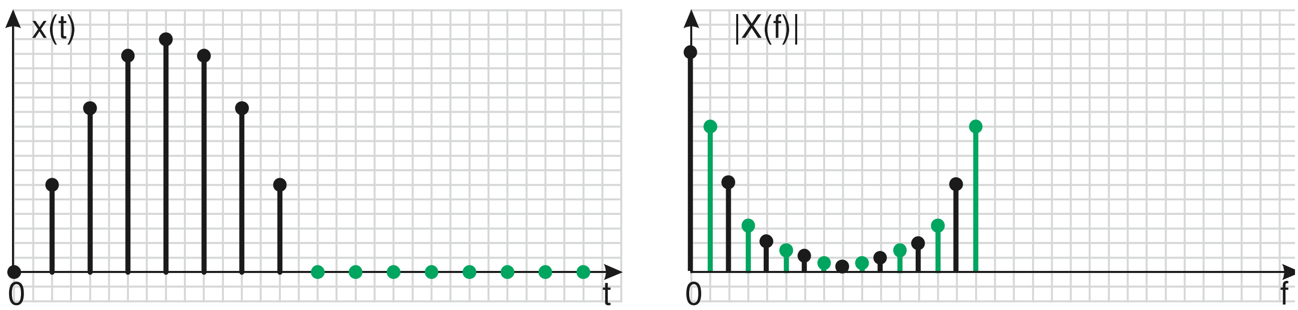
4. Mehrere Perioden in einem Bereich bewirken eingeschobene Nullen im anderen Bereich (siehe auch Skript Kap. „Die Diskrete Fouriertransformation“→ „DFT aus mehreren Perioden“)

speziell obere Reihe: der Zeitabstand Δt ist kleiner → f_A ist größer, daher nimmt das Spektrum mehr Frequenzen ein. Der Frequenzabstand bleibt aber gleich, da sich $T = N \cdot \Delta t$ nicht ändert.

speziell untere Reihe: T ist größer, aber Δt bleibt gleich → f_A bleibt gleich, aber Δf schrumpft.



Angehängte Nullen in einem Bereich lösen den anderen Bereich besser auf:



5. siehe Skripte „DSP2_5x.m“.

zu b) Gleichverteilung: $\sigma = \frac{d/2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155$

zu c) Summe bel. Verteilungen ist normalverteilt; $\sigma_{summe}^2 = 16 \cdot \sigma^2 \rightarrow \sigma_{summe} = 4 \cdot 1{,}155$

zu d) AKF sieht aus wie δ-Impuls → LDS sieht aus wie Rechteck (jeweils mit Streuung)
Rechenaufwand: **AKF**: jeweils etwa $20000^2 = 400 \cdot 10^6$ Multiplikationen und Additionen (reell)
LDS: für DFT sind $400 \cdot 10^6$ komplexe Multiplikationen und Additionen nötig! Bei FFT mit N=32768 Werten wären es höchstens 250 000 komplexe Multiplikationen/Additionen.

zu f) Es entstehen 2 Dreiecke. Vgl. Übung 1, Fourier-Reihe über 2 Perioden