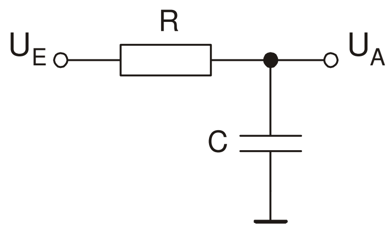
Digitale Signalverarbeitung Übung 3

1. Digitales RC-Glied



a) Wie lautet die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{H}(\omega) = \underline{U}_A / \underline{U}_E$ des RC-Glieds?

b) Überlegen Sie anhand von $\underline{H}(\omega)$, wie die Differentialgleichung für $u_A(t)$ lauten muss. Hinweis: $j\omega \rightarrow d/dt$

c) Wie lautet die diskrete Differenzengleichung? Benennen Sie U_E in x um und U_A in y. Nähern Sie Ableitungen nach der Rückwärts-Methode.

d) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z)$ des diskreten Systems? Verwenden Sie die Abkürzung $a := \frac{RC}{\Delta t}$.

e) Wo liegen die Pol- und Nullstellen des Systems? Welche Bedeutung haben diese?

f) Ist das System stabil (d.h. existiert der Frequenzgang mit $z = e^{j2\pi f \Delta t}$)?

g) Berechnen Sie $H(1)$ und $H(-1)$ für $a = 50$. Welche Bedeutung haben diese Werte? Skizzieren Sie daraus den Frequenzgang.

h) Wie lautet die Impulsantwort? Hinweis: $\frac{z}{z-c} \overset{z-Trafo}{\longleftrightarrow} c^k \quad (|c| < 1)$.

i) Zeichnen Sie das System in der Direktstruktur II und der Transponierten Direktstruktur II.

j) Mit Hilfe der FFT sollen x-Datenblöcke der Länge $N^* = 100$ verarbeitet werden. Wie gehen Sie vor?

2. Instabiles System

Die Übertragungsfunktion eines Systems lautet $H(z) = \frac{z^2}{z^2 + \frac{3}{2} \cdot z - 1}$.

a) Welche Pol- und Nullstellen hat das System? Zeichnen Sie die Pol- und Nullstellen in der z-Ebene ein. Ist das System stabil? Kann man einen Frequenzgang angeben?
Welche Bedeutung hat $H(1)$?

b) Zeichnen Sie das System in der Transponierten Direktstruktur II.

c) Am Eingang des Systems wird die Folge { 1; 2; 0; 0; … } eingespeist. Verfolgen Sie in der Systemstruktur für k = 0..2, wie sich das Ausgangssignal ergibt.

d) Berechnen Sie das komplette Ausgangssignal aus c) mit Hilfe der z-Transformation.

3. Partialbrüche

a) Berechnen Sie $h_k^{(a)} \xleftrightarrow{z-Trafo} H_a(z) = \frac{z}{z^2-4}$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

b) Berechnen Sie das Zeitsignal zu $H_b(z) = \frac{H_a(z)}{z}$ einmal mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und einmal mit dem Ergebnis aus a).

4. Matlab

Ein Nachhallen entsteht, wenn ein Geräusch mehrfach an Wänden reflektiert wird. Am einfachsten erzeugt man den Hall rekursiv, indem das um die Nachhallzeit verzögerte und gedämpfte Ausgangssignal zum Eingangssignal addiert wird.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H(z) des Systems $y_k = x_k + 0{,}4 \cdot y_{k-1000}$. Welche Nachhallzeit wird dadurch bei der Abtastfrequenz f_a = 8 kHz erzeugt?

b) Laden Sie eine Wave-Datei (`audioread`) als Eingangssignal x_k. Verarbeiten Sie die Daten mit dem Befehl `filter(b,a,xk)` (b: Zähler von H(z), a: Nenner).
Spielen Sie das Ergebnis ab.

Der Einfluss eines Systems kann rückgängig gemacht werden, indem man das inverse System in Reihe schaltet. Die Übertragungsfunktion des inversen Systems lautet 1/H(z).

c) Welches Problem kann dabei auftreten? Wie lautet hier die inverse Übertragungsfunktion?

d) Verarbeiten Sie das Ergebnis aus b) mit `filter(a,b,yk)` und spielen Sie das Ergebnis wieder ab.

e) Berechnen Sie die ersten 10 Werte der Impulsantwort zu 3a) mittels Polynomdivision.
Befehl: `deconv`

f) Setzen Sie den Algorithmus aus 1i) um (a = 19). Als Signal dient $x_k = \sin(\frac{2\pi}{140} \cdot k)$. Lassen Sie die ersten 5 Blöcke berechnen und ausgeben.

Digitale Signalverarbeitung Übung 3

Lösungen:

1.a) Spannungsteiler: $\frac{U_A}{U_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$

b) $U_A \cdot (1 + j\omega \cdot RC) = U_E \quad \rightarrow \quad u_A + \dot{u}_A \cdot RC = u_E$ („mal jω“ entspricht Ableitung)

c) mit $u_A \rightarrow y$ und $\dot{u}_A = \dot{y} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t}$ ist $y_k + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t}\right) \cdot RC = y_k \cdot \left(1 + \frac{RC}{\Delta t}\right) - y_{k-1} \cdot \frac{RC}{\Delta t} = x_k$

d) $Y(z) \cdot \left[(1+a) - a \cdot \frac{1}{z}\right] = X(z) \rightarrow \quad H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{(1+a) - a \cdot \frac{1}{z}}$. Wer lieber mit positiven z-Potenzen rechnet, erweitert mit z und erhält: $H(z) = \frac{z}{(1+a) \cdot z - a}$

e) Wertet man reelle Frequenzen aus (z auf Einheitskreis), dann steigt der Betrag |H(z)| in der Nähe von Polstellen an, bei Nullstellen wird er klein. Nullstellen und Polstellen bei z = 0 bewirken am Betrag nichts. Nach dem Verschiebungssatz entsprechen sie zeitlichen Verschiebungen der Impulsantwort.

Nullstelle: $z_0 = 0$;

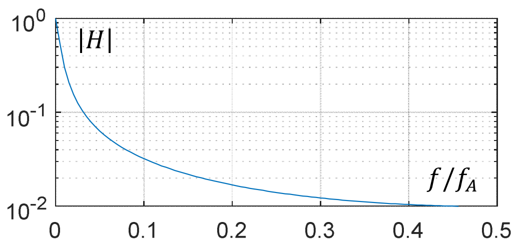
Polstelle: $(1+a) \cdot z_\infty - a = 0 \rightarrow \quad z_\infty = \frac{a}{1+a}$

f) stabil → alle Polstellen liegen innerhalb des Einheitskreises. Da $a = \frac{RC}{\Delta t}$ reell und positiv ist gilt für alle a: $|z_\infty| < 1$. Das ist sinnvoll; ein RC-Glied kann nicht anfangen zu schwingen.

g) |H| gibt für Schwingungen das Amplitudenverhältnis zwischen Ausgang und Eingang an. Dabei gehört $z = 1$ zur Frequenz 0 (also konstantes Signal) und $z = -1$ zu $f_A/2 \quad (z = e^{j2\pi f/f_A})$.

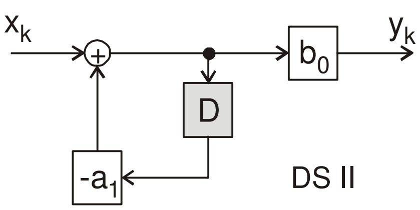
$$|H(1)| = 1$$

$$|H(-1)| = \frac{-1}{-1-a-a} \approx 0{,}01$$

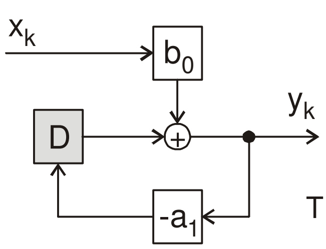


h) $H(z) = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{z}{z - \frac{a}{1+a}} \quad \rightarrow \quad h_k = \frac{1}{1+a} \cdot \left(\frac{a}{1+a}\right)^k$ für $k \geq 0$

i) Der Faktor $\frac{1}{1+a}$ wird in den Zähler gezogen: $H(z) = \frac{\frac{1}{1+a} \cdot z}{z - \frac{a}{1+a}}$. Durch Vergleich mit dem Skript ergibt sich: $b_0 = \frac{1}{1+a}$, $b_p = 0 : p > 0$; $\quad a_1 = -\frac{a}{1+a}$, $a_p = 0 : p > 1$



DS II



TDS II

i) Zunächst wird die Impulsantwort durch eine FIR-Antwort der Länge M = N* = 100 genähert. Dann werden mindestens N*-1 Nullen angehängt (*zero padding*), damit die DFT/FFT beim Periodisieren der Signale keinen Fehler macht. Die Impulsantwort hat damit mindestens 199 Werte. Die nächste Zweierpotenz ist 256, tatsächlich werden also insgesamt 156 Nullen angehängt. Dann wird die FFT der Impulsantwort H_n (einmal) berechnet.

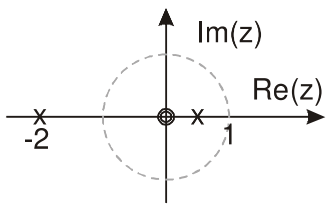
Jeder x-Datenblock wird ebenfalls mit 156 Nullen verlängert, dann die FFT berechnet. Komponentenweise wird multipliziert: $Y_n = X_n \cdot H_n$. (für 256 Komponenten).

Mit der inversen FFT wird das Zeitsignal y_k berechnet, das ebenfalls die Länge 256 hat. Zu den ersten 156 Werten werden die letzten 156 y_k des vorherigen Blockes addiert. Dann können die 100 ersten aktuellen yk-Werte ausgegeben werden. Die restlichen 156 werden gespeichert und zum Beginn des nächsten Blocks addiert.

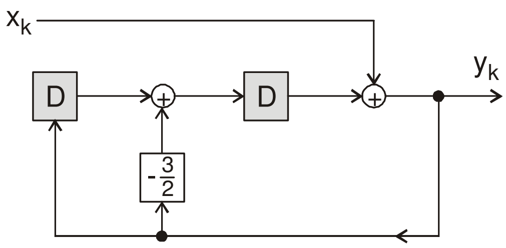
2.a) Zähler: $z_0^2 = 0 \rightarrow z_0 = 0$: Doppelte Nullstelle bei 0

Nenner: $z_\infty{}^2 + \frac{3}{2} \cdot z_\infty - 1 = 0 \rightarrow z_\infty = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4 \cdot (-1)} \right) = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}} = +\frac{1}{2} \;|\; -2$

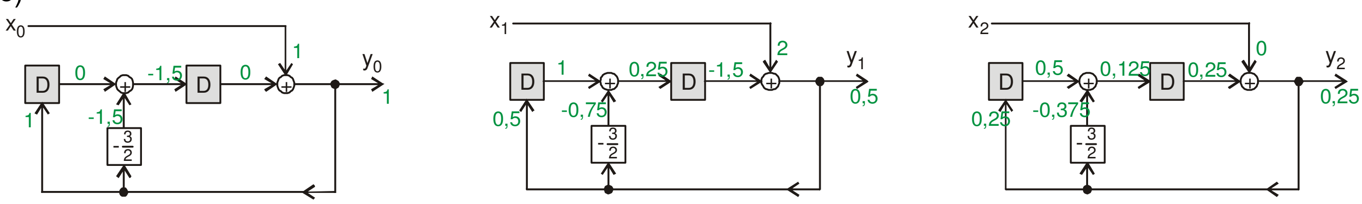
Wegen $z_{\infty 2} = -2$ ist das System nicht stabil. Also existiert das Spektrum/der Frequenzgang nicht (obwohl man den Einheitskreis $z = e^{j2\pi f \Delta t}$ in H(z) einsetzen könnte, aber es ergibt physikalisch nichts Sinnvolles.



b) mit $b_0 = 1$,
$a_1 = 3/2$,
$a_2 = -1$:



c)



d) $X(z) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{z} = \frac{z+2}{z}$; $Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{(z+2) \cdot z^2}{z \cdot (z+2) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \xleftrightarrow{z-Trafo} y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

3.a) $z_{\infty 1,2} = \pm 2 \rightarrow \; H_a(z) = C_0 + C_1 \cdot \frac{z}{z-2} + C_2 \cdot \frac{z}{z+2}$; $\quad B(z) = z;\; A(z) = z^2 - 4;\; A'(z) = 2z \rightarrow$

$C_{1,2} = \frac{z}{z\cdot(2z)} = \frac{1}{2z}\Big|_{z=\pm 2} \rightarrow C_1 = \frac{1}{4},\; C_2 = -\frac{1}{4}$

$C_0 = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \;\; \rightarrow \; h_k^{(a)} = \frac{1}{4}\cdot 2^k - \frac{1}{4}\cdot(-2)^k = \{\,0; 1; 0; 4; 0; 16; 0; 64; \ldots\}$; $k \geq 0$

b) Partialbruch: $H_b(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z^2-4} = \frac{1}{z^2-4} \rightarrow \;\; C_{1,2} = \frac{1}{2z^2}\Big|_{z=\pm 2} = \frac{1}{8}$, $C_0 = 0 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$

$h_k^{(b)} = -\frac{\delta_k}{4} + \frac{1}{8}\cdot 2^k + \frac{1}{8}\cdot(-2)^k = \{\,0;\; 0; 1; 0; 4; 0; 16; 0; 64; \ldots\}$; $k \geq 0$

schlau: $\frac{1}{z}\cdot H_a(z) \xleftrightarrow{z-Trafo} h_{k-1}^{(a)} == \{\,0;\; 0; 1; 0; 4; 0; 16; 0; 64; \ldots\}$

4.a) $Y(z) = X(z) + 0{,}4\cdot Y(z)\cdot z^{-1000} \;\; \rightarrow \;\; H(z) = \frac{1}{1-0{,}4\cdot z^{-1000}}$.

Nachhallzeit $= 1000\cdot\Delta t = \frac{1000}{8000\,Hz} = 0{,}125\;s$

c) bei 1/H(z) tauschen Pol- mit Nullstellen. Falls H(z) eine Nullstelle $|z_0| > 0$ besitzt, wird das inverse System instabil. Hier ist alles OK: $1/H(z) = 1 - 0{,}4\cdot z^{-1000}$ (FIR-System)

Weitere Aufgaben siehe Skripte “DSP3_4a.m”, „DSP3_4f.m“.