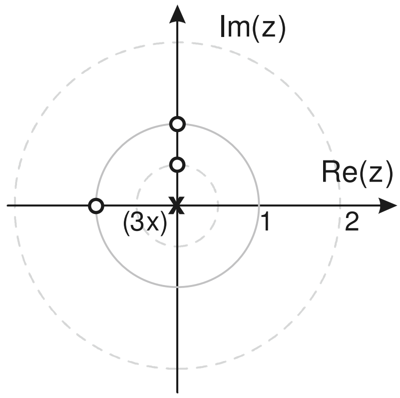
Digitale Signalverarbeitung Übung 4

1. Linearphasiges FIR-Filter

a) Wie lautet allgemein die Übertragungsfunktion eines linearphasigen FIR-Filters 2. bzw. 3. Ordnung? Wie viele Pole und Nullstellen gibt es? Wie groß sind die Phasenlaufzeiten?

b) Ein FIR-Tiefpass sollte ein konstantes Eingangssignal nicht verändern, d.h. Ausgang $y = x$. Was folgt daraus für die Koeffizienten b_i der Übertragungsfunktion (Differenzengleichung)?

c) Ergänzen Sie die Pole und Nullstellen im Diagramm, so dass ein linearphasiges FIR-Filter mit reellen Koeffizienten entsteht. Ist damit die Übertragungsfunktion $H(z)$ eindeutig gegeben?



d) Wie groß muss b_0 sein, wenn ein konstantes Signal am Eingang ein ebenso großes Signal am Ausgang erzeugt?

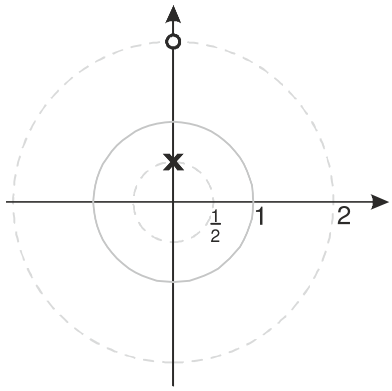
e) Skizzieren Sie den Verlauf des Betrags $|H(z)|$, also den Frequenzgang. Um welchen Filtertyp handelt es sich?

f) Geben Sie die Impulsantwort h_k an.

g) Ist das System invertierbar?

2. Allpass

a) Ergänzen Sie Pol- und Nullstellen, um einen Allpass 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten zu erhalten. Wie lautet der Koeffizient b₀, wenn $|H(z)| = 1$ gelten soll?



b) Das System mit $H_2(z) = \frac{z}{z-4}$ ist instabil. Geben Sie eine stabile Übertragungsfunktion $H_b(z)$ mit gleichem Frequenzgang an, also $\left|H_b\left(e^{j2\pi f\Delta t}\right)\right| = \left|H\left(e^{j2\pi f\Delta t}\right)\right|$.

3. Matlab

a) Plotten Sie die Phasenlaufzeit des Allpasses 2. Ordnung aus 2a) für $f_A = 1\ kHz$.
Befehle: `angle, unwrap`

b) Ein digitales Tiefpass-Filter (Abtastfrequenz $f_A = 44{,}1\ kHz$) soll folgende Vorgaben erfüllen:
$\delta_D = 10\%;\ \ \delta_S = 0{,}02;\ \ f_D = 1000\ Hz;\ \ f_S = 1200\ Hz$

Erstellen Sie das Filter mit `filterDesigner` als:

- FIR-Filter („*Generalized Equiripple*“, „*Minimum order*“, Dpass = $\delta_D/2$) <u>und</u> als
- Elliptisches IIR-Filter („*Units* = *squared*“→ *Epass* = $(1-\delta_D)^2$ und *Estop* = δ_S^2).

Sehen Sie sich Betrag, Phasenlaufzeit, Pole und Nullstellen an.

Lösungen:

1.a) $H_2(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_0}{z^2}$: 2 Pole (bei 0) und 2 NS, $t_0 = \frac{2}{2} \cdot \Delta t$

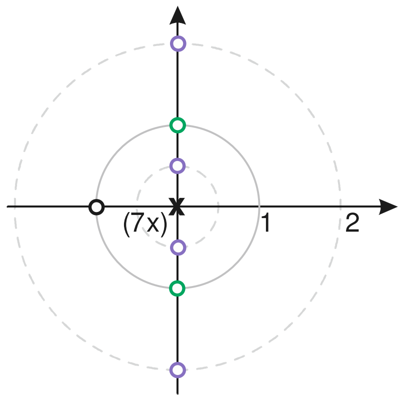
$H_3(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_0}{z^3}$; 3 Pole (bei 0) und 3 NS, $t_0 = \frac{3}{2} \cdot \Delta t$

b) Differenzengleichung FIR: $y_k = b_0 \cdot x_k + b_1 \cdot x_{k-1} + \cdots b_m \cdot x_{k-m}$

Wenn alle $x_k = const = c$, dann ist $y_k = c \cdot (b_0 + b_1 + \cdots b_m) = c$

Also: $b_0 + b_1 + \cdots b_m = 1$

c) siehe rechts. Zu jeder Nullstelle z_0 sind auch z_0^*, $\frac{1}{z_0}$ und $\frac{1}{z_0^*}$ Nullstellen. Allerdings gilt bei $z_0 = j$: $\frac{1}{z_0} = z_0^*$ und bei $z_0 = -1$: $z_0 = \frac{1}{z_0} = z_0^* = \frac{1}{z_0^*}$; so ergeben sich 7 Nullstellen.
Ein kausales System muss dann auch 7 Polstellen (bei 0) haben.



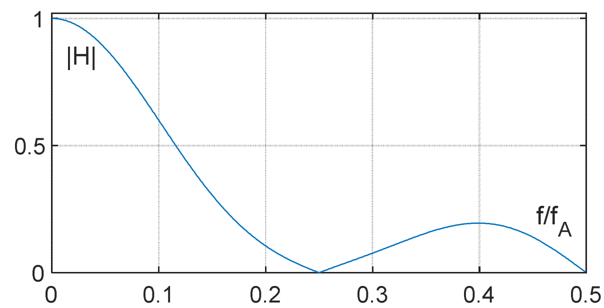
$H(z)$ ist bis auf einen Faktor eindeutig, denn b_0 ist beliebig:

$$H(z) = b_0 \cdot \frac{\left(z-\frac{j}{2}\right)\cdot\left(z+\frac{j}{2}\right)(z-j2)\cdot(z+j2)\cdot(z-j)(z+j)(z+1)}{z^6} = \frac{b_0}{z^6} \cdot (z^2+0{,}25)\cdot(z^2+4)\cdot(z^2+1)\cdot(z+1)$$

d) Frequenzgang : zu $f = 0$ gehört $z = e^0 = 1$, damit ist gefordert :

$$H(1) = \frac{b_0}{1^6} \cdot 1{,}25 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 25 \cdot b_0 = \mathbf{1} \;\rightarrow\; b_0 = 0{,}04$$

f) siehe rechts. Wichtig für Skizze: $H(0) = 1$;
Nullstellen bei $f_A/4$ und $f_A/2$;
Funktion: Tiefpass



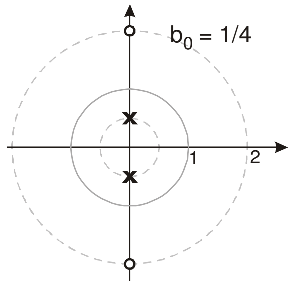
g) ausmultipliziert ergibt $H(z)$ eine Potenzreihe
(oder mit MATLAB: `poly`(<Vektor mit den 7 Nullstellen>):

$$H(z) = 0.04 + \frac{0.04}{z} + \frac{0.21}{z^2} + \frac{0.21}{z^3} + \frac{0.21}{z^4} + \frac{0.21}{z^5} + \frac{0.04}{z^6} + \frac{0.04}{z^7} \qquad \text{(Spiegelpolynom!)}$$

ablesen aus $H(z)$: $h_k = \{0.04;\ 0.04; 0.21; 0.21; 0.21; 0.21; 0.04; 0.04;\ 0;\ 0;\ 0 \ldots\}$

h) einige $|z_0| \geq 1$, diese werden zu Polstellen des inversen Systems $\rightarrow H_{inv}$ instabil

2.a) siehe rechts. Aus Polen und Nullstellen (und b_0) ergibt sich:



$$H(z) = b_0 \cdot \frac{(z-2j)\cdot(z+2j)}{(z-j/2)\cdot(z+j/2)} = b_0 \cdot \frac{z^2+4}{z^2+\frac{1}{4}}\ ;\ H(1) = b_0 \cdot \frac{5}{1{,}25} = 1 \rightarrow b_0 = \frac{1}{4}$$

Die Formel im Skript (Kap. Allpässe) liefert das gleiche Ergebnis, wobei b_0 in den Zähler multipliziert erscheint.

b) Multiplizieren mit Allpass mit Nullstelle bei $z = 4$ → Pol bei $z = 1/4$:

$$H_{AP}(z) = \frac{-\frac{z}{4}+1}{z-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad H_2(z) = \frac{z}{z-4} \cdot \frac{-\frac{1}{4}\cdot(z-4)}{z-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \quad \text{(stabil)}$$

3.a) siehe Skript „DSP4_3a.m“

Hinweis: Phasen aus `angle` liegen immer im Bereich $[-\pi\,;+\pi]$, bei noch größeren Phasenwinkeln tritt ein Sprung auf. Die Sprünge kann man mit `unwrap` ausgleichen.

b) Hinweise zu FIR:
empfohlene *Design Method* = „*Generalized Equiripple*“,
Magnitude Specifications: *Units* = *linear*, *Dpass* = $\delta_D/2$ = 0.05 (weil nach oben und unten),
Dstop = δ_S = 0.02

zu IIR/elliptic:
Magnitude Specifications: *Units* = *squared*, *Epass* = $(1-\delta_D)^2$ =0.9^2, *Estop* = δ_S^2 =0.02^2

Hinweis zur Phasenlaufzeit (*Phase delay*): die Anzeige erfolgt in "rad/Hz", d.h. die Zeit in Sekunden ergibt sich erst, wenn man den Zahlenwert durch 2π teilt. Beim FIR-Filter sollte $t_0 = \frac{m}{2} \cdot \Delta t = const$ herauskommen.

Die Koeffizienten kann man als Vektoren in den Workspace exportieren (Menü "*File/Export…*"); *Numerator* = Zähler (bei uns b_i); *Denominator* = Nenner (bei uns a_i).

In Matlab kann man z.B. mit `filter(b,a,xk)` ein Signal (Vektor) `xk` verarbeiten, oder einfach den Frequenzgang mit `freqz(b,a)` anzeigen.