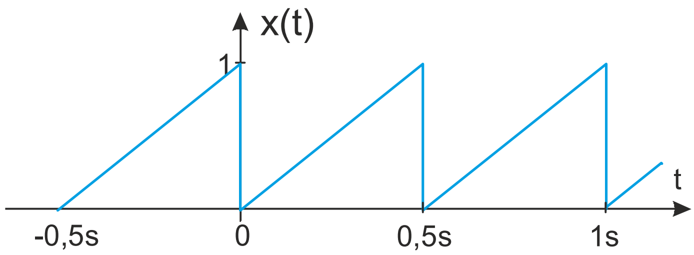
1. Fourier-Integral

a. Zeichne das Spektrum der Sägezahn-Funktion x(t) mit Periode T = 0,5 s.

b. Welches Spektrum besitzt die gleiche Funktion x(t), wenn man als Periode 1 s oder 2 s annimmt?



2. z-Transformation

a. Besitzt die Rechteck-Funktion x(t) aus Aufgabe 1 eine z-Transformierte?

b. Berechne die z-Transformierten von

i.	$\delta_k = \begin{cases} 1: & k = 0 \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$	(Delta-Impuls)
ii.	$\delta_{k+1} = \begin{cases} 1: & k = -1 \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$	(verschobener Delta-Impuls)
iii.	$\text{rect}\left(\frac{k-k_0/2}{k_0}\right) = \begin{cases} 1: & 0 \le k \le k_0 \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$	(kausales Rechteck; k_0: gerade)
iv.	$s_{-k} = \begin{cases} 1: & k \le 0 \\ 0: & k > 0 \end{cases}$	(Ausschalt-Sprung)
v.	$s_k \cdot 2^{-k}$	(exponentielle Abnahme)
vi.	$s_k \cdot 2^k$	(exponentielle Zunahme)
vii.	$s_k \cdot (-1)^k$	(periodischer Wechsel +1/-1)
viii.	$x_k = \{1;\ -2; 1; 0; 0; 0; \dots\}$	(endliches Signal)

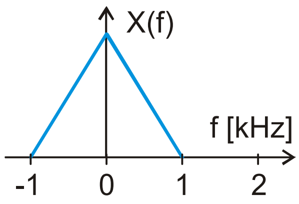
c. Für Geübte: Berechne die z-Transformierten von

i.	s_k	(Sprung)
ii.	$c = const \quad : \forall\, k \in \mathbb{Z}$	(Konstante)
iii.	$s_k \cdot e^{-ak} \cdot \cos(b \cdot k)$	

3. Abtasttheorem

a. Lässt sich die Sägezahn-Funktion x(t) (aus 1.) ohne Aliasing abtasten?

b. Ein Signal x(t) besitzt das skizzierte Spektrum $X(f) \in \mathbb{R}$.
Skizziere das Spektrum der abgetasteten Funktion, wenn
f_a = 1 kHz bzw. f_a = 2 kHz.



c. Welche Symmetrie-Eigenschaften hat das Zeitsignal aus b)?

4. DFT

a. Von einem Signal werden 128 Werte aufgenommen mit der Abtastfrequenz 1 MHz. Wie groß sind Zeitschrittweite Δt und Frequenzschrittweite Δf?

b. Die Werte aus a. werden mit je 2 Byte gespeichert. Welchen Platzbedarf hat die DFT, wenn Real- und Imaginärteile ebenfalls je 2 Byte genau sein sollen?

c. Von der kontinuierlichen Zeitfunktion $x(t) = \sin(2\pi \cdot 2\, kHz \cdot t)$ sollen genau zwei Perioden abgetastet werden mit insgesamt 100 Werten. Welche Abtastfrequenz ist nötig und wie lautet damit das diskrete Signal x_k?
Welche Frequenzschrittweite Δf ergibt sich, an welchen Indizes n entstehen Frequenzanteile?

d. An welchen Frequenzen sind Spektrallinien für das diskrete Zeitsignal
$x_k = \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot k\right),\ m \in [0; N-1]$, zu erwarten?

e. Wie lautet die DFT einer konstanten Funktion $x_k = 1 : \forall\, k \in [0; N-1]$?

f. Wie lautet die DFT des diskreten Impulses $x_k = \begin{Bmatrix} 1 : k = 0 \\ 0 : k \in [1; N-1] \end{Bmatrix} =: \delta_k$
mit Periode N?

<u>Matlab/Octave:</u>

g. Das Signal $x_k = \cos\left(\frac{2\pi}{32} \cdot 5 \cdot k\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{32} \cdot 8 \cdot k\right),\ k \in \mathbb{Z}$, ist periodisch nach 32 Abtastwerten. Berechnen Sie die DFT von x_k; zeichnen Sie Real- und Imaginärteil getrennt.
[Befehle: `fft, subplot, real, imag, plot/stem`]

h. Erzeugen Sie ein diskretes Rechtecksignal mit Periode 2 ms und Duty-Cycle 50 %, abgetastet mit 8 kHz. Zeichnen Sie 3 Perioden.
[Befehle: `zeros, ones, plot, repmat`]

i. Tasten Sie das Chirp-Signal $y(t) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{400}{s^2} \cdot t^2\right)$ im Bereich $0 \le t \le 5$ s mit f_A = 8 kHz ab und spielen Sie es mit `soundsc(y, 8000)` ab. Welche Frequenzen treten auf? Geben Sie dann nur jeden 2. Abtastwert des Signals wieder, aber mit f_A = 4 kHz.
Erklären Sie, was zu hören ist.

Lösungen

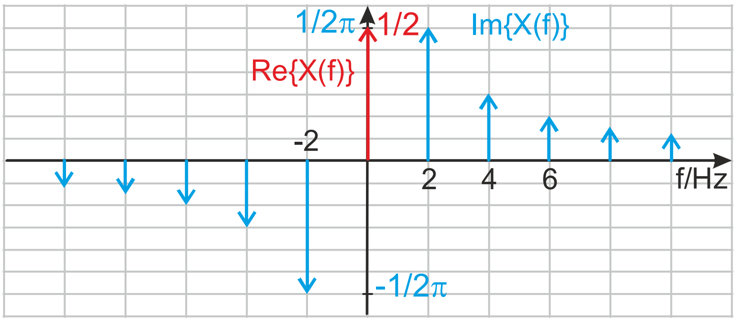
1.a) Tabelle Fourier-Reihen: $\tilde{X}_0 = \frac{1}{2}$; $\tilde{X}_{n \neq 0} = \frac{j}{2\pi n}$;

Fourier-Integral: δ-Impulse;

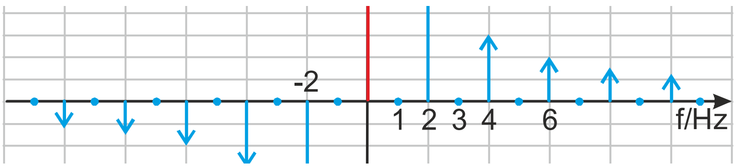
Abstand $\Delta f = \frac{1}{T} = 2\ Hz$

(Realteil: 1 roter Impuls bei 0,

Imag.teil: blaue Impulse)



b) Dieselbe Zeitfunktion hat dasselbe Spektrum!
Der Frequenzabstand Δf ist zwar nun 1 Hz bzw. 0,5 Hz, aber die Koeffizienten der Fourier-Reihe an den neuen Frequenzstellen sind alle 0, d.h. keine neuen Anteile im Spektrum.



2.a) Nur diskrete Signale x_k besitzen eine z-Transformierte, kontinuierliche nicht!

b.i) $X_i(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^0 = 1$ (const. ∀ z)

ii) $X_{ii}(z) = z \cdot X_i(z) = z$ (Verschiebungssatz)

iii) $X_{iii}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} 1 \cdot z^{-k} = \frac{z^{-k_0-1}-1}{z^{-1}-1}$ (geometrische Reihe); oder aus Tabelle und Verschiebungssatz.

iv) $s_k \overset{z}{\longleftrightarrow} H(z) = S(z) = \frac{z}{z-1}$; Zeitumkehr: $s_{-k} \overset{z}{\longleftrightarrow} H\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{1-z}$

v) Modulationssatz, obwohl 2^{-k} keine Schwingung ist: $X_v(z) = S\left(\frac{z}{2^{-1}}\right) = \frac{2z}{2z-1} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$

vi) wie v): $X_{vi}(z) = S\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{z-2}$

vii) wie v): $X_{vii}(z) = S\left(\frac{z}{-1}\right) = \frac{-z}{-z-1} = \frac{z}{z+1}$

vii) $X_{vii}(z) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot \frac{1}{z} + 1 \cdot \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}$

c) i) $S(z) = X_v(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{z^{-\infty}-1}{z^{-1}-1}$ (geometrische Reihe),

für $|z^{-1}| < 1$ ist $|z^{-\infty}| \to 0$, also $X_v(z) = -\frac{1}{z^{-1}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$

ii) Ansatz (Vermutung wegen Fourier-Integral): $X_{ii}(z) = a \cdot \delta(z-1)$

Rücktrafo $x_k = c = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint a \cdot \delta(z-1) \cdot z^{k-1} \cdot dz = \frac{a}{2\pi j} \cdot 1^{k-1} \rightarrow$

Ansatz funktioniert mit $a = 2\pi j \cdot c$

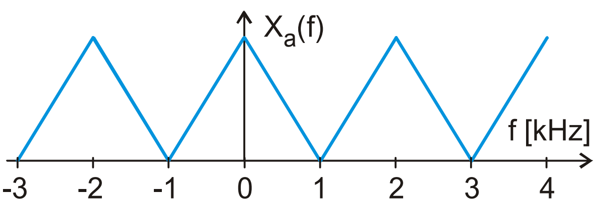
iii) 1. Schritt: $e^{-ak} \cdot \cos(bk) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{(-a+jb)k} + e^{(-a-jb)k}\right)$; Modulationssatz $\rightarrow$

$$X_{iii}(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(S\left(\frac{z}{e^{(-a+jb)}}\right) + S\left(\frac{z}{e^{(-a-jb)}}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{e^{(-a+jb)}}{z}} + \frac{1}{1-\frac{e^{(-a-jb)}}{z}}\right)$$

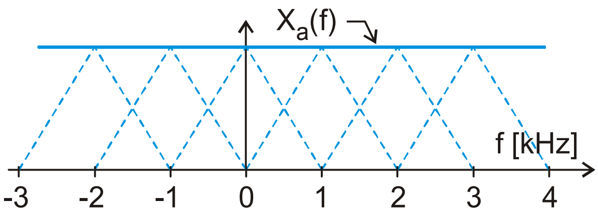
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{e^{(-a-jb)}}{z}+1-\frac{e^{(-a+jb)}}{z}}{1-\frac{e^{(-a+jb)}}{z}-\frac{e^{(-a-jb)}}{z}+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-\frac{e^{-a}}{z}\cdot 2\cdot\cos a}{1-\frac{e^{-a}}{z}\cdot 2\cdot\cos a+\frac{1}{z^2}} = \frac{z\cdot(z-e^{-a}\cdot\cos a)}{z^2-2z\cdot e^{-a}\cdot\cos a+e^{-2a}}$$

3.a) $X_1(f)$ ist nicht bandbegrenzt. Beim Abtasten entsteht deshalb immer Aliasing, auch mit beliebig kleinen Abtastintervallen Δt.

b) f_a = 2 kHz:



f_a = 1 kHz:



kein Alias (rekonstruierbar)

Alias führt zu Xa(f) = const. Nicht mehr rekonstruierbar ($X(f) = 1 \xleftrightarrow{Fourier} \delta(t)$)

c) X(f) ist real und gerade → x(t) ist auch real und gerade (Zuordnungssatz)

4.a) $\Delta t = \frac{1}{f_a} = 1\mu s$; $\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{1\,MHz}{128} \approx 7{,}8\,kHz$

b) Das Zeitsignal belegt 128·2 = 256 [byte]. Es ist rein reell, daher hat das Spektrum Symmetrien: Der Realteil ist achsensymmetrisch (gerade), der Imaginärteil punktsymmetrisch (ungerade).

Das komplette Spektrum besteht aus 128 komplexen Werten, wegen der Symmetrien muss aber nur die Hälfte gespeichert werden, also 64 komplexe Werte. Das ergibt einen Speicherbedarf von 64·2·2 = 256 [byte]. Damit enthält das Spektrum genauso viel Information wie das Zeitsignal.

c) N = 100, N·Δt = 2·T_0 = 2/(2 kHz) = 1 ms → Δt = 10 µs → f_a = 100 kHz

$x_k = \sin(2\pi \cdot 2\,kHz \cdot 10\,\mu s \cdot k) = \sin\left(\frac{2\pi}{50} \cdot k\right)$

$\Delta f = f_a/N = 1\,kHz$; $f_0 = 2\,kHz = 2 \cdot \Delta f$. Es entstehen also Frequenzanteile bei n = 2 und n = -2 (bzw. n = N-2 = 98 wegen Periodizität)

d) Der Term m/N des diskreten Signals entsteht aus $f_0 \cdot \Delta t = f_0/f_a$ (f_0: Frequenz des kontinuierlichen Signals): $\frac{m}{N} = \frac{f_0}{f_a} = \frac{f_0}{N\cdot\Delta f} \rightarrow m = \frac{f_0}{\Delta f}$ ist der Index der Frequenz im diskreten

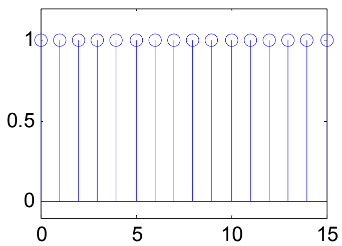
Spektrum. Eine zweite Linie liegt bei –m bzw. bei N-m.

Wenn $m > \frac{N}{2}$ $\left(\rightarrow f_0 > \frac{f_a}{2}\right)$ dann ergibt sich Aliasing, denn dann ist $N - m < \frac{N}{2}$

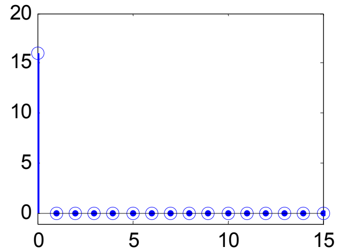
e) $X_{n\neq 0} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot k\cdot n} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot n}\right)^k = \frac{\left(e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot n}\right)^N - 1}{e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot n} - 1} = \frac{e^{-j2\pi\cdot n} - 1}{e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot n} - 1} = \frac{1-1}{e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot n} - 1}$

$= 0$ (endliche geometrische Reihe)

$X_0 = \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot 1 = N$

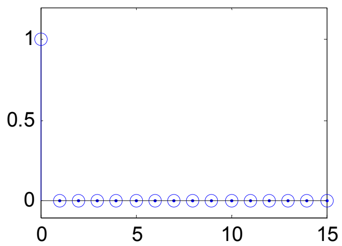


Zeitsignal

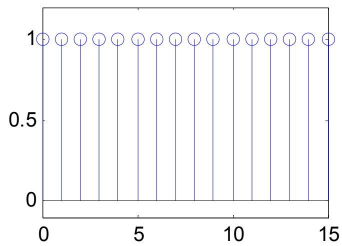


Spektrum

f) $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot k\cdot n} = 1 \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot 0\cdot n} = 1 : \forall n$



Zeitsignal



Spektrum

g, h, i) siehe Skripte „dsp1_4g.m“, „dsp1_4h.m“ und „dsp1_4i.m“

zu i): Phasenwinkel $\varphi = 2\pi \cdot \frac{400}{s^2} \cdot t^2 \rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi \cdot \frac{400}{s^2} \cdot 2t$; für 0 ≤ t ≤ 5 s ist

$f(t) = \frac{\omega}{2\pi} = 0 \ldots 4000 \frac{1}{s}$, also bis $f_A/2$.

Bei Dezimation mit Faktor 2 aber f_A = 4 kHz dauert das Abspielen gleich lang, es gibt aber Aliasing.