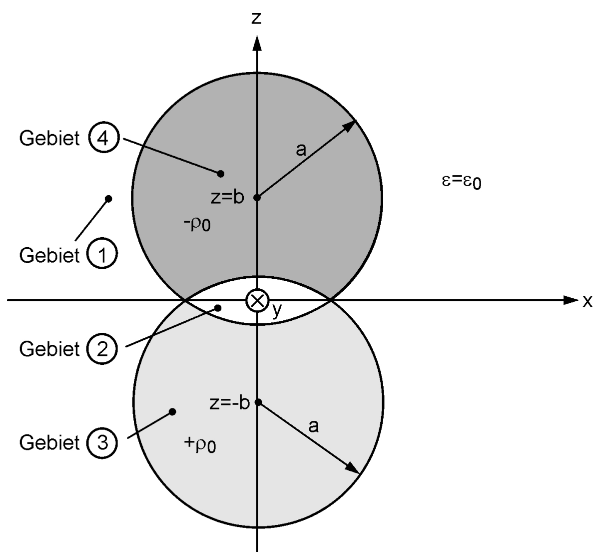
Aufgabe B3

Durch die beiden Kugelflächen beschrieben durch die Beziehungen $x^2+y^2+(z-b)^2 = a^2$ und $x^2+y^2+(z+b)^2 = a^2$ mit $0 < b < a$ werden gemäß Abbildung vier Gebiete im Vakuum mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ definiert. Das Gebiet ③ ist mit einer konstanten Raumladungsdichte $\rho_0 > 0$, das Gebiet ④ mit einer konstanten Raumladungsdichte $-\rho_0$ gefüllt.



a) Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ im ganzen Raum mit der Normierung $\Phi(r\to\infty) = 0$ im Unendlichen. Geben Sie hierzu die elektrischen Potentiale $\Phi_k(r,\vartheta,\varphi)$ in den Gebieten mit $k = 1,2,3,4$ an.

b) Berechnen Sie die Komponenten der elektrischen Feldstärke E_r, E_ϑ und E_φ in den Gebieten ① und ②. Geben Sie die Komponenten jeweils in Kugelkoordinaten an.

c) Geben Sie das Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E}(r,\vartheta,\varphi)$ in den Gebieten ① und ② für folgenden Grenzfall an:

$$\lim_{\substack{b\to 0\\ \rho_0\to\infty}} (b\rho_0) = \frac{3}{8\pi a^3} A \text{ mit } A = \text{ const. } > 0.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis!

Hinweis: Formen Sie für große Abstände mit $b << r$ das elektrische Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ so um, dass die Variable r nur in Form der Quotienten $\beta = b/r$ auftritt und berechnen Sie das Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ für große Abstände, d.h. $\beta << 1$, durch Reihenentwicklung. Potentialterme, die Ausdrücke der Form β^n mit $n > 1$ enthalten, sollen dabei vernachlässigt werden.

d) Berechnen Sie für den Grenzfall nach Aufgabenpunkt c) die bei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$ auftretende Flächenladung ρ_F.

e) Bestimmen Sie die gesamte elektrische Feldenergie der im Grenzfall c) vorliegenden Anordnung.

Aufgabe B4

Gegeben ist ein konzentrischer Zylinderkondensator mit den Elektrodenradien a und $c > a$. Die Elektroden, deren Wandstärke vernachlässigbar ist, tragen pro Längeneinheit die Ladung $\bar{Q} > 0$ (bei $r = a$) bzw. $-\bar{Q}$ (bei $r = c$); für die Länge L der Anordnung gilt $L >> c$. Es wird nur derjenige Raumbereich betrachtet, in dem Störungen durch die Kondensatorenden vernachlässigbar sind.

Berechnen sie für alle folgenden Fälle die Verschiebungsdichte $\vec{D}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und das Potential V mit der Normierung $V(r = a) = 0$; es gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$ für $r < a$ und $r > c$. Geben Sie für die Fälle b), c) und d) die Kapazität pro Längeneinheit $\bar{C}$ an.

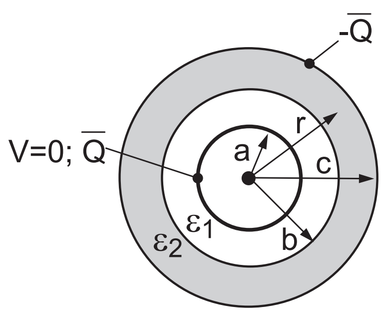


Abbildung 1

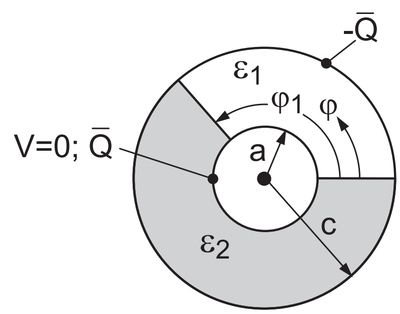


Abbildung 2

a) Der Raum $a < r < c$ ist mit einem homogenen Dielektrikum ε gefüllt, dass die Raumladungsdichte $\rho(r) = \frac{\bar{Q}}{4\pi a r}$ enthält. Berechnen Sie zusätzlich die differentielle Kapazität pro Längeneinheit $\bar{C}' = \frac{d\bar{Q}}{dU}$($d\bar{Q}$ = Längenänderung auf der Innenelektrode pro Längeneinheit, dU = zugehörige Spannungsänderung).

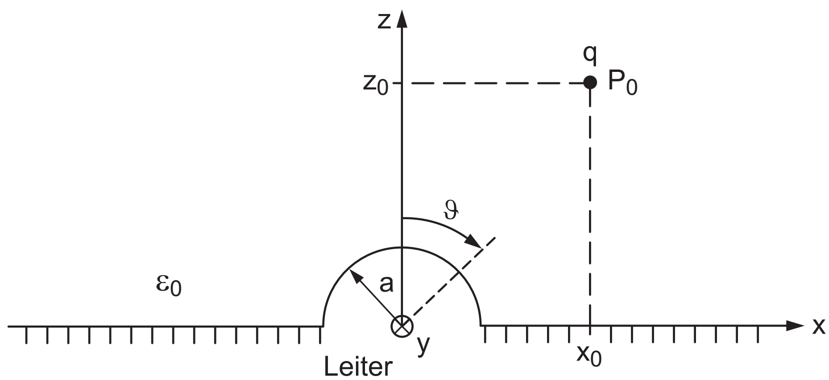
b) Der Raum $a < r < c$ enthält ein ortsabhängiges Dielektrikum $\varepsilon(r)$; $\varepsilon(r)$ soll so bestimmt werden, dass gilt: $\varepsilon(r = c) = \varepsilon_0,\ \vec{E} =$ konst. für $a < r < c$.

c) Der Raum $a < r < c$ enthält ein geschichtetes Dielektrikum mit ε_1 und ε_2 gemäß Abbildung 1. Welchen Wert muss ε_1 bei einem festen ε_2 haben, damit $\vec{E}(r = a + 0) = \vec{E}(r = b + 0)$ gilt? Skizzieren Sie für diesen Fall den radialen Verlauf von V und der Radialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{D}$.

d) Der Raum $a < r < c$ ist gemäß Abbildung 2 mit zwei Dielektrika gefüllt (ε_1 und ε_2). Geben Sie zusätzlich den Verlauf der Flächenladungsdichte auf dem Innenleiter als Funktion von φ an.

Aufgabe B7/B8

Ein unendlich ausgedehnter leitender Halbraum ($z \leq 0$) besitzt eine ebenfalls leitende halbkugelförmige Ausbeulung vom Radius a (siehe Skizze). Im Punkt $P_0(x_0, 0, z_0)$ mit $\sqrt{x_0^2 + z_0^2} > a$ befindet sich im Vakuum eine Punktladung q.



a) Berechnen Sie das Potential V im Vakuum.

   Im Folgenden gilt: $x_0 = 0$.

b) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte ρ_F auf der Halbkugel in Abhängigkeit vom Winkel ϑ und skizzieren Sie $\rho_F(\vartheta)$.

c) Berechnen Sie die auf die Punktladung wirkende Kraft F.

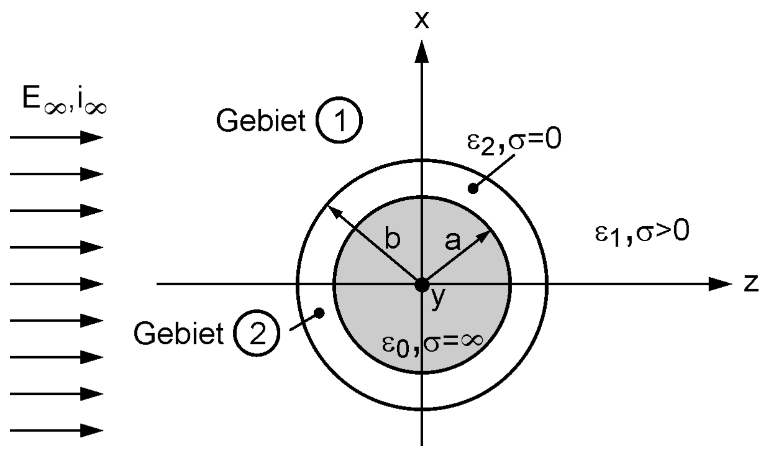
d) Wie groß ist die elektrische Feldstärke auf dem Kreis $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$? (Begründung!)

e) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der elektrischen Feldlinien und der Äquipotentiallinien in der Ebene y = 0.

Übungsbetreuung:
PD DR.-ING. DIRK SCHULZ
dirk2.schulz@tu-dortmund.de

AUFGABE B10

In ein ursprünglich homogenes, stationäres elektrisches Strömungsfeld mit dem Feld $\vec{E}_\infty = E_\infty \vec{n}_z$ sowie der Stromdichte $\vec{J}_\infty = \sigma \vec{E}_\infty$ und einem Medium mit der konstanten Leitfähigkeit σ und der Dielektrizitätskonstanten ε_1, wird gemäß Abbildung 2 eine Metallkugel mit dem Radius a eingebracht, die von einer nicht leitenden Kugelschale mit dem Außenradius $b > a$ und der Dielektrizitätskonstanten ε_2 umgeben ist.



a) Berechnen Sie das Potential Φ_∞ des ungestörten Strömungsfeldes in kartesischen Koordinaten.

b) Zeigen Sie, dass Φ_∞ in Kugelkoordinaten mit der z-Achse als Polarachse die Form $\Phi_\infty = f_\infty(r) \cdot g(\vartheta) +$ const. hat. Geben Sie die beiden Funktionen $f_\infty(r)$ und $g(\vartheta)$ an!

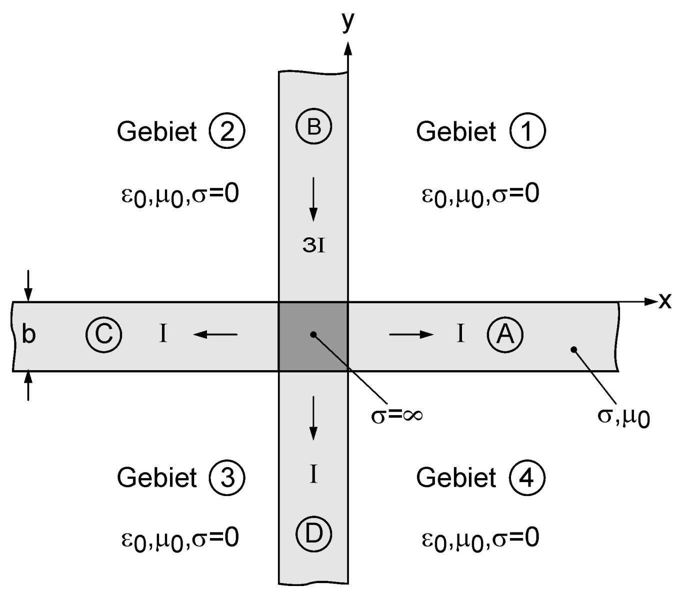
c) Berechnen Sie die Potentiale Φ_1 und Φ_2 in den Raumgebieten ① $(r > b)$ und ② $(a < r < b)$ für die gegebene Anordnung mit der Normierung $\Phi(r = a) = 0$ auf der Metallkugel.
Hinweis: Benutzen Sie für beide Bereiche jeweils den Ansatz $\Phi = f(r) \cdot g(\vartheta) +$ const. mit der Funktion $g(\vartheta)$ aus Aufgabenpunkt b). Berechnen Sie zunächst das Potential Φ_1 bis auf eine Normierungskonstante. Beachten Sie dabei, dass Φ_1 für $r \to \infty$ bis auf eine Konstante in Φ_∞ übergehen muss.

d) Geben Sie die Komponenten in Kugelkoordinaten $E_r,\ E_\vartheta,\ E_\varphi$ der Feldstärke $\vec{E}$ für beide Raumbereiche an.

e) Bestimmen Sie die Werte der Feldstärke $\vec{E}$ für $r = b \pm 0$. Geben Sie diejenigen Punkte an, in denen $\{\vec{E}(r = b + 0)\}^2$ und $\{\vec{E}(r = b - 0)\}^2$ ihre Maxima und Minima annehmen. Welche von Null verschiedenen kartesischen Komponenten besitzt $\vec{E}$ in den jeweiligen Punkten?

Aufgabe 3

Gegeben ist die skizzierte kreuzförmige Anordnung senkrecht aufeinander stehender weit ausgedehnter Platten der Breite b mit der Leitfähigkeit σ. Der Kreuzungsbereich ist unendlich gut leitend. Der umfließende Strom pro Längeneinheit $3 \cdot \bar{I}$ verteilt sich gleichermaßen auf die übrigen Platten. Das Potential werde im Kreuzungspunkt der Anordnung zu Null normiert.



a) Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{J}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und das Potential Φ in den Platten.

b) Bestimmen Sie ein Potential Φ in den Gebieten 1 und 4 jeweils mit Hilfe des Additionsansatzes $\Phi(x, y) = f(x) + g(y)$. Berechnen Sie die dazugehörigen elektrischen Felder $\vec{E}^1$ und $\vec{E}^4$.

c) Treten an den Leiterflächen Flächenladungen auf? Begründung Sie Ihre Antwort!

d) Skizzieren Sie die $\vec{E}$-Feld- und Äquipotentiallinien in allen Gebieten.

e) Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ist in den Gebieten 1 und 4 unter Vernachlässigung von Streufeldern zu bestimmen, die durch den Kreuzungsbereich verursacht werden. Berechnen Sie $\vec{H}^1$ und $\vec{H}^4$ mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\vec{H}^1 = (0, 0, H_z^1)$ und $\vec{H}^4 = (0, 0, H_z^4)$ mit $H_z^1 = \text{const.}$ und $H_z^4 = \text{const.}$ gilt.

f) Bestimmen SIe den Poyntingvektor $\vec{S}^1$ und $\vec{S}^4$ in den Bereichen 1 und 4. Zeigen Sie für ein Volumen $\tau_{xyz} = \Delta x \cdot b \cdot \Delta z$ innerhalb des Leiters zwischen den Gebieten 1 und 4, dass folgende Beziehung gilt:

$$P_{\text{Joule}} = -\oint \vec{S} \cdot d\vec{F}.$$

Aufgabe B13

Zwei unendlich lange, gerade, parallele Linienleiter, die sich im Vakuum befinden, werden entgegengesetzt vom Gleichstrom I durchflossen (siehe Abbildung 1). Die von der Anordnung im ganzen Raum erzeugte magnetische Feld $\vec{H}$ soll berechnet werden. Zur Berechnung soll zuerst eine rechteckige Leiterschleife betrachtet werden (siehe Abbildung 2).

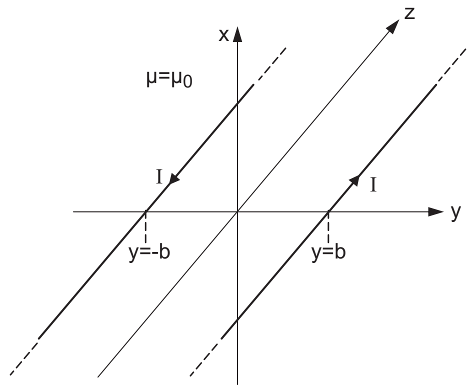


Abbildung 1: Parallele Linienleiter

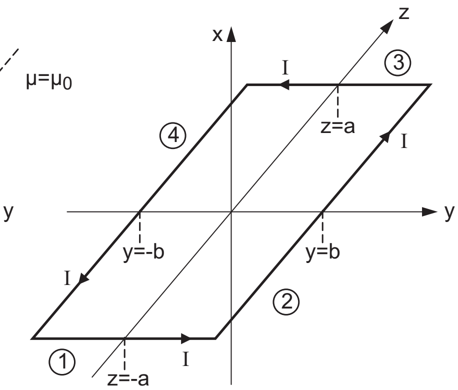


Abbildung 2: Rechteckige Leiterschleife

a) Zeigen Sie, dass $div\vec{J} = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $a \to \infty$ nur die Seiten 2 und 4 der Schleife einen Beitrag zu dem magnetischen Vektorpotential $\vec{A}$ leisten.

c) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus a) das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ für die rechteckige Leiterschleife nach Abbildung 2.

d) Bestimmen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ für den parallelen Linienleiter nach Abbildung 1.

e) Führen Sie eine Koordinatentransformation durch, so dass für einen der beiden Linienleiter die Bedingung $y = 0$ erfüllt ist.

f) Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ eines einzelnen, unendlich langen geraden Linienstroms, indem Sie auch $b \to \infty$ streben lassen.)